Revista en Educación:
Matemáticas, Ciencias Naturales y Sociales del Caribe
ISSN AÑO 1 VOLUMEN 1

Una Aproximación a la Solución de los Tres Problemas Sin Solución con Regla y Compas de la Antigua Grecia, Utilizando el Software Geogebra

FABIO FIDEL FUENTES MEDINA[6]
ISIDORO GORDILLO GALVIS[7]

Resumen

Los griegos fueron los primeros en realizar muchas construcciones geométricas. A ellos debemos las construcciones con regla y compás que conocemos; gracias a ellos es posible bisecar un ángulo, construir polígonos, construir las cónicas y muchas cosas más. Sin embargo, algunos problemas se resistieron por muchos años a su solución y todo lo que se hizo fue en vano. Los tres grandes problemas que se resistieron a su solución, fueron: La duplicación del cubo, la cuadratura del círculo y la trisección del ángulo, es aquí donde juega un papel importante la intervención de la tecnología, para la aproximación a una solución de dichos problemas.

Palabras claves: Regla, Compás, Cuadratura, Trisección, Duplicación

Abstract.

The Greeks were the first to make many geometric constructions. To them we owe the constructions with rule and compass that we know; thanks to them it is possible to bisect an angle, build polygons, construct conics and many other things. However, some problems resisted their solution for many years and everything that was done was in vain. The three major problems that resisted its solution were: The duplication of the cube, the quadrature of the circle and the trisection of the angle, is where the intervention of technology plays an important role, for the approach to a solution of said problems.

Key words: Rule, Compass, Square, Trisection, Duplication

1. INTRODUCCIÓN.

Los tres problemas sin solución con regla y compás de la antigua Grecia fueron: la Cuadratura del Círculo, la Trisección del Ángulo y la Duplicación del Cubo. Sin embargo, aunque el problema no este planteado explícitamente, en el papiro del Rhind que data del año 1800 a. C, descubierto en 1855 d. C. donde se evidencian una serie de problemas matemáticos, entre ellos el problema de la Cuadratura del Círculo. En este orden de ideas, la biblia en el libro de Reyes 1, capítulo 6, cuando se desea construir en el templo de Salomón, el altar para colocar el "Arca de la Alianza", el cual contiene los diez mandamientos de Dios le entregó a Moisés; el mismo problema aparece implícito en

[6] Universidad Popular del Cesar; Colombia; fabiofuentes@unicesar.edu.co
[7] Universidad Popular del Cesar; Colombia; isidorogordillo@unicesar.edu.co

Revelaciones capítulo 21, cuando se da la orden de la reconstrucción del templo de Jerusalén. Así mismo, en la duplicación del cubo aparece descrito cuando los habitantes de Atenas, en busca de una solución a la peste que había matado tantos habitantes, acuden a su Oráculo de Delfos y éste les expresa que deberán construir un templo en forma de cubo de tamaño doble al existente. En este orden de ideas, a pesar de estos problemas aparecen implícitamente en algunos textos, son los griegos quienes, de manera formal, con el uso de la regla y el compás proponen darle solución a la Cuadratura del Círculo, la Duplicación de Cubo y la Trisección del Ángulo; que hoy conocemos como los tres grandes problemas de la antigua Grecia sin solución.

En la búsqueda de la solución a dichos problemas, la gran mayoría de los griegos matemáticos abordaron dicho problema sin encontrar solución alguna, esta situación logró que las matemáticas avanzaran. Los grandes matemáticos se concentraron en darle solución a estos tres grandes problemas sin darle solución con regla y compás; pero si lo hicieron con otros elementos.

Hoy día, se conoce que es imposible dar solución a estos problemas, con la regla y el compás; pero se han presentado soluciones que hacen uso de otras herramientas. Así la Cuadratura de Circulo, se logra haciendo primero una rectificación de la circunferencia, proceso que consiste en encontrar un segmento de longitud igual a la de la circunferencia y luego con base igual a dicho segmento y altura igual al radio de la circunferencia, se convierte el círculo en un rectángulo equivalente, es decir, un rectángulo de área igual al área del círculo dado. Por último, se convierte el rectángulo en un cuadrado equivalente. Esta forma se logra de manera muy aproximada la cuadratura de un círculo.

2. MÉTODOLOGÍA

El trabajo se puede enmarcar dentro del diseño cualitativo de corte holístico (Rodríguez, 2010) con el deseo de conocer como algunos griegos de la antigüedad buscaron darle solución a la cuadratura del círculo, la trisección de ángulo y la duplicación del cubo con el uso de la regla y el compás, lo cual sólo después de 2000 años se prueba que es imposible. En este orden de ideas, se realiza un estudio minucioso de revisión bibliográfica de algunos textos de geometría, así como documentos existentes relacionados con la temática a tratar. Bajo esta mirada, se tomaron los tratamientos más relevantes a juicio de los investigadores, y con el uso del GEOGEBRA se reconstruyen los pasos, haciendo algunos aportes significativos a dichas soluciones. A continuación, se presentan algunas construcciones realizadas en la antigüedad y sus justificaciones.

CUADRATURA DEL CÍRCULO

Para darle solución a este problema, se recurre en primer momento, rectificar la circunferencia; es decir, construir un segmento de longitud igual a la circunferencia (Rey, 1960).

Luego construir un rectángulo equivalente al círculo; es decir, un rectángulo de área igual al a círculo; y por último construir un cuadrado equivalente al rectángulo (Landaverde, 1962). De esa forma se logra la cuadratura del círculo. La justificación está basada en la propuesta planteada por (Baldor, 2004).

Parte 1: Rectificación de la circunferencia

Paso 1. Construya una circunferencia con centro en A y radio AB
Paso 2. Trace una tangente a la circunferencia que pase por B
Paso 3. Trace seis (6) radios sobre la tangente, partiendo de B, al último punto de intersección llámelo H
Paso 4. Trace el diámetro que tiene a B por uno de sus extremos. Llame I al otro extremo
Paso 6. Marque un radio desde I. Sea J dicho punto sobre la circunferencia
Paso 7. Trace la bisectriz del ángulo JOI. Sea L el punto de intersección de la bisectriz con la circunferencia.
Paso 8. Trace una perpendicular al diámetro que pase por L. Sea M el punto de intersección de dicha perpendicular con el diámetro.
Paso 9. Una a M con H.
El segmento MH tiene longitud igual a la longitud de la circunferencia. De ésta manera se la rectificado la circunferencia. (Figura 1).

Parte 2: Rectángulo equivalente al círculo

Paso 1. Encuentra su punto medio N, del segmento MH
Paso 2. Construye un rectángulo de base NH y altura igual al radio AB. Llama a ese rectángulo $HNOP$.
El rectángulo $HNOP$ es equivalente al círculo de radio AB.

Parte 3: Rectángulo equivalente al cuadrado

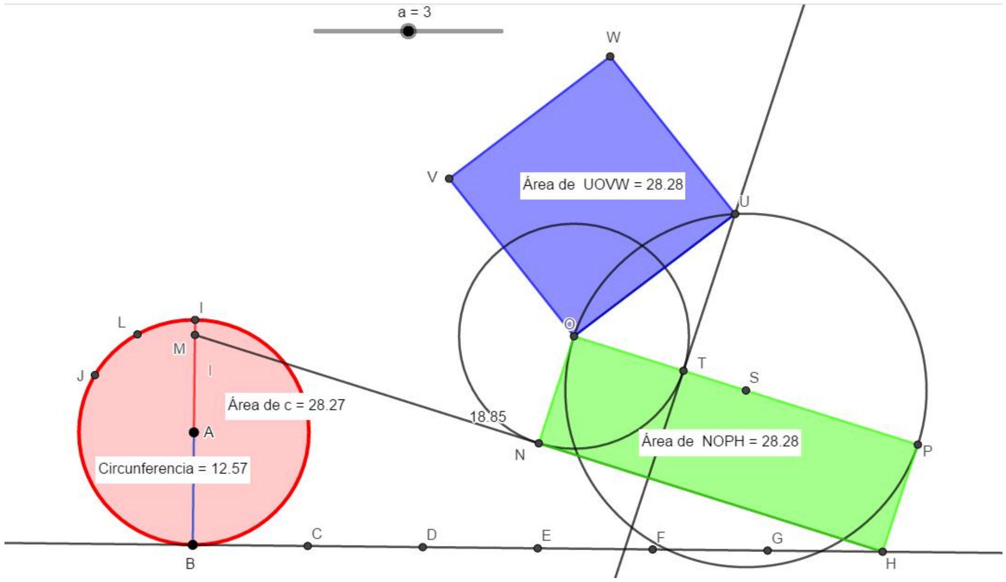
Paso 1. Encuentra el punto medio S, del lado PO
Paso 2. Con centro en S, traza una semicircunferencia de radio SO
Paso 3. Traza una circunferencia con centro en O y radio AB que corta a OP en T
Paso 4. Traza una perpendicular a OP que pasa por T
Paso 5. Sea U el punto de intersección entre la perpendicular que pasa por T y la circunferencia con centro en S.
Paso 6. Construye un cuadrado de lado OU
El cuadrado $OUWV$ es equivalente al rectángulo $HNOP$.

De esta forma, se ha logrado la cuadratura del círculo.

La figura 1, muestra los procesos de rectificación, transformación del círculo en un rectángulo equivalente y este en un cuadrado; de esa forma se logra la cuadratura del círculo. El proceso se presenta con el uso del GEOGEBRA.

Figura 1. Rectificación de la circunferencia

Revista en Educación:
Matemáticas, Ciencias Naturales y Sociales del Caribe
Universidad Popular del Cesar
ISSN AÑO 1 VOLUMEN 1



Parte 4: Justificación

Sea R el radio de la circunferencia, entonces $AB = R$ (1)
Por construcción $BH = 6R$ (2)
Como L es bisectriz del ángulo JAI, entonces el ángulo $LAI = 30°$ (3)
Como la altura de un triángulo equilátero es $\frac{\sqrt{3}}{2}L$, entonces: $AM = \frac{\sqrt{3}}{2}R$ (4)
MBA es triángulo rectángulo en B; con IH hipotenusa y $BM =$ R+√3/2 R (5)
Por el teorema de Pitágoras, se tiene: $\left(R + \frac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2 + (6R)^2 = (MH)^2$ (6)
Desarrollando lo cuadrados y simplificando: $R^2 + \sqrt{3}R^2 + \frac{3}{4} + 36R^2 = (MH)^2$ (7)
Simplificando y factorizando: $\left(\frac{151}{4} + \sqrt{3}\right)R^2 = (MH)^2$ (8)
Sustituyendo el racional y hallando la raíz: $(37{,}75 + 1{,}73)R^2 = (MH)^2$ (9)
Sumando los decimales: $39{,}48R^2 = (MH)^2$ (10)
Extrayendo la raíz cuadrada se obtiene que $MH = 6{,}28R$ (11)

De (10), podemos decir que la longitud de la circunferencia es $6{,}28R$; lo que equivale aproximadamente a $2\pi R$, que es la ecuación que permite calcular la longitud de una circunferencia.

TRISECCIÓN DEL ÁNGULO

Con el uso de la regla y el compás es posible trisecar algunos ángulos, tales como: 45°, 90°, 135°, 180°, 225°, 270° (Fuentes, 2010). Sin embargo, a la hora de abordar cualquier ángulo es imposible trisecarlo con el uso de la regla y el compás. Los antiguos griegos en su intento de darle solución a este problema crearon instrumentos y curvas que de manera aproximada logran darle solución.

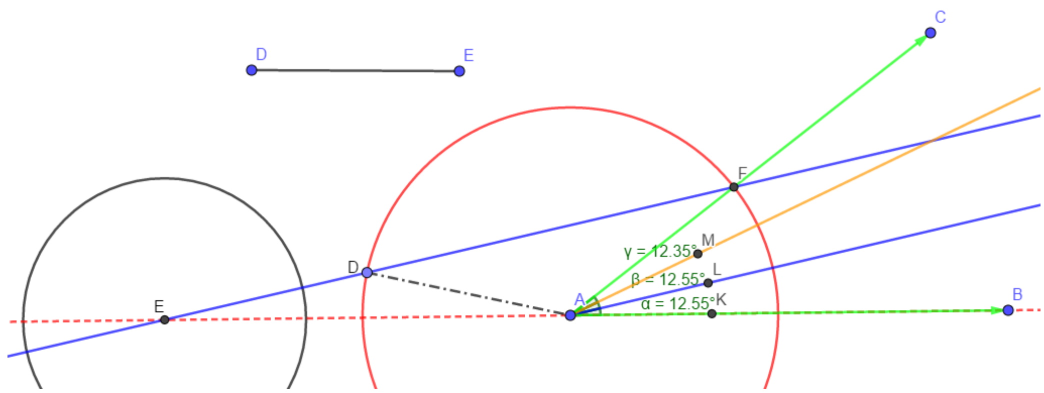
En este orden de ideas, Arquímedes lo logra con la espiral denominada "Espiral de Arquímedes"; Hipías de Elis, lo logra al construir una curva denominada "Trisectriz de Hipías";

Nicomedes, con la concoide de Nicomedes. Así mismo, se logró trisecar un ángulo agudo con el compás y una regla con dos marcas; igualmente diseñaron una escuadra denominada la escuadra del carpintero. Para este taller se abordaron las soluciones del el compás y la regla con dos marcas, y la cuadratriz de Hipias (Fuentes, 2010).

El compás con una regla y dos marcas

Paso 1. Dibuja un ángulo agudo BAC. (Figura 2)
Paso 2. En una regla a cualquier distancia, marca dos puntos D y E
Paso 3. Con centro en A y radio DE traza una circunferencia que corta a lado CA en F
Paso 4. Con la regla, haga que D sea un punto de la prolongación de AB y que E esté sobre la circunferencia de radio DE y esos dos puntos sean colineales con D
Paso 5. Se copia el ángulo DEA tres veces sobre el ángulo BAC. Así se ha trisecado el ángulo.

Figura 2. Trisección de un ángulo agudo con una regla y dos marcas y el compás



Justificación

1. El ángulo FDA es un ángulo exterior del triángulo DEA; por lo tanto aplicando el teorema que expresa que en un triángulo uno de sus ángulo exterior es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes, se obtiene que: $m(\measuredangle DEA) + m(\measuredangle EDA) = m(\measuredangle FDA)$.como es triángulo FDA es isósceles; por lo tanto: $2 * \ m(\measuredangle EDA) = m(\measuredangle FDA)$
2. El ángulo BAF es un ángulo exterior del triángulo FAD; por lo tanto aplicando el teorema que expresa que en un triángulo uno de sus ángulos exteriores es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes, se obtiene que: $m(\measuredangle DEA) + \ m(\measuredangle FDA) = m(\measuredangle BAC)$
3. El ángulo BAF es un ángulo exterior del triángulo FAD; por lo tanto aplicando el teorema que expresa que en un triángulo uno de sus ángulos exteriores es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes, se obtiene que: $m(\measuredangle DEA) + \ m(\measuredangle DFA) = m(\measuredangle BAC)$
4. Como el triángulo FAD es isósceles, entonces: $m(\measuredangle ADF) = m(\measuredangle AFD)$
5. Sustituyendo, se puede decir que: $2 * m(\measuredangle DEA) + \ m(\measuredangle DEA) = m(\measuredangle BAC)$

Luego se puede decir que: $3 * m(\measuredangle DEA) = m(\measuredangle BAC)$

Revista en Educación:
Matemáticas, Ciencias Naturales y Sociales del Caribe
ISSN AÑO 1 VOLUMEN 1

Con lo anterior, se ha trisecado el ángulo agudo dado.

Trisección con la Trisectriz de Hipias de Elis.

Hipía intentando trisecar el ángulo con el uso de la regla y el compás, descubre una nueva curva denominada Trisectriz, que no es posible construir con el uso de la regla y compás. En este sentido, Supone que el segmento ON gira en sentido de las manecillas del reloj con movimiento uniforme hasta ocupar la posición OM. A la vez, el segmento NB se desplaza hacia abajo, también con movimiento uniforme y ocupa en el mismo instante la posición OM. Un punto T de la trisectriz viene dado por la intersección en cada instante de dichos segmentos. (Figura 3.1A)

Figura 3.1. Trisectriz de Hipias

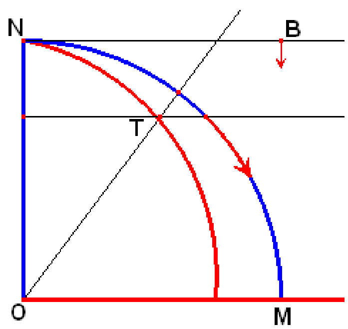
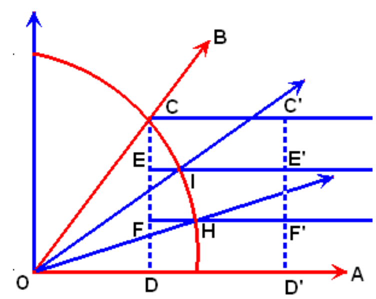


Figura 3.2. Trisección con la Trisectriz



Para la trisección, se procede de la siguiente manera:

Paso 1. Se construye una cuadratriz sobre el ángulo (Figura 3.2)

Paso 2. Se divide $\overline{CD} = \overline{C'D'}$ en tres partes iguales

Paso 3. Se trazan paralelas a $\overrightarrow{OA}$ que cortan a la Trisectriz en los puntos I y H

Paso 4. Se trazan $\overrightarrow{OI}$ y $\overrightarrow{OH}$. De esta manera el ángulo AOB, está dividido en tres ángulos iguales.

Trisección con la escuadra del carpintero

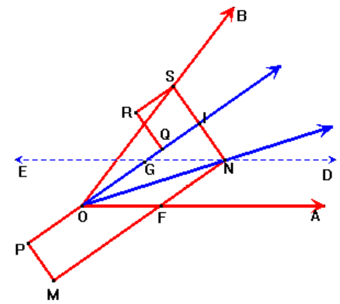
La escuadra del carpintero es un instrumento construido por los griegos en el siglo

III d. C., su forma es como se indica en la figura 4.1, en ella todos los ángulos son rectos.

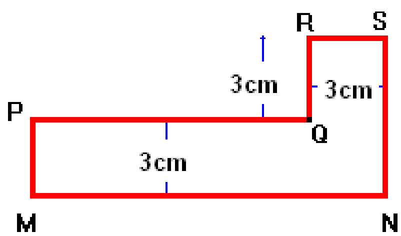
Figura 4.1. Escuadra del carpintero

Figura 4.2. Trisección con la escuadra

Revista en Educación:
Matemáticas, Ciencias Naturales y Sociales del Caribe
Universidad Popular del Cesar
ISSN AÑO 1 VOLUMEN 1



Para trisecar un ángulo AOB, con la ayuda de la escuadra del carpintero, se procede de la siguiente manera:



Paso 1. Trace una paralela a OA a una distancia PM (Figura 4.2.)

Paso 2. Coloque la escuadra de tal manera que el vértice del ángulo AOB sea colineal con PQ; el vértice N, con DE; y el vértice S, colineal con OB

Paso 3. Los ángulos SOQ, QON y NOA, tienen la misma medida

De esta forma se ha trisecado el ángulo AOB.

Justificación

1. Los ángulos BOQ y QON tienen la misma medida, puesto que los triángulos SOJ y JON son congruentes por tener dos lados y el ángulo comprendido de igual medida.

2. El cuadrilátero $OFNG$ es un paralelogramo; por tener lados paralelos dos a dos, ON es una de sus diagonales. Entonces los ángulos QON y NOA tienen la misa medida.

De esta forma los tres ángulos tienen igual medida, logrando trisecar el ángulo.

LA DUPLICACIÓN DEL CUBO

En este problema, se plantea con el uso de la regla y el compás, construir un cubo de volumen doble a partir de un cubo inicial. Todos los matemáticos de la antigua Grecia hicieron procedimientos diferentes para darle solución. En este orden de ideas, y con el deseo de darle solución se encuentran: Hipócrates, Arquita, Menecmo, Apolonio, Herón, Arquímedes, Eratóstenes y muchos otros (Pérez, 2007), pero les fue imposible con regla y compás; en su afán de encontrarle solución encontraron otros mecanismos y profundizaron en el estudio de las cónicas que hoy se conocen.

Para demostrar la imposibilidad de resolver el problema con regla y compás, se parte de que un cubo de lado L, tiene por volumen $V_1 = (L_1)^3$. Así, para un cubo de volumen el doble, se debe obtener $V_2 = (L_2)^3 = 2 * V_1 = 2 * (L_1)^3$, entonces se puede decir que $L_2 = \sqrt[3]{2}L_1$. Lo anterior demuestra la imposible de una solución con los implementos aceptados por los griegos para el trabajo de la geometría en la antigüedad.

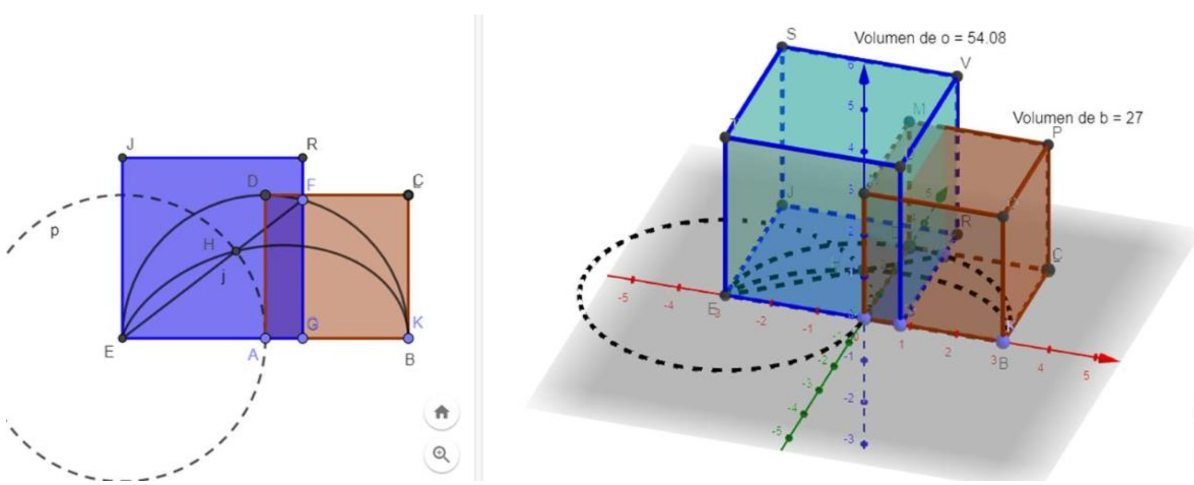
A continuación, se presenta el procedimiento utilizado por Hipócrates para resolver la duplicación del cubo; quien simplifica la solución de Arquita. En este sentido, a partir de un segmento, construye una curva que la denomina duplicatriz (Pérez, 2007), con la cual obtiene una duplicación de cubo muy aproximada. Para este caso, se seguirá ese procedimiento, haciendo la construcción con el uso de GEOGEBRA.

Procedimiento

Paso 1. Se construye una semicircunferencia, con centro en A, extremos en E y B; y radio AB, la arista del cubo que se le desea duplicar el volumen.
Paso 2. Sea F un punto de la semicircunferencia; trace el segmento EF.
Paso 3. Se traza una perpendicular al diámetro de la semicircunferencia que pase por el punto F y corta al diámetro en G
Paso 4. Se traza una perpendicular al segmento EF, que pase por el punto G, e intersecta al segmento EF el punto H.
Paso 5. Con la opción Lugar geométrico, se da clic en el punto H, y luego en el punto F, se obtiene la curva llamada Duplicatriz, que es la curva que se genera con el doble movimiento.
Paso 6. Con centro en E y radio EA, se dibuja una circunferencia, que intersecta la Duplicatriz.
Paso 7. Mueva el punto F hasta que H coincida con la intersección de la circunferencia de radio EA y la duplicatriz.

En este instante el segmento EG, es la arista del cubo de volumen doble del problema planteado. Es decir, el lado del cubo mayor corresponde a la propuesta planteada para la duplicación. La figura 5, representa la gráfica de la solución aproximada de la duplicación de cubo con el software GEOGEBRA.

Figura 5. Duplicación del cubo con GEOGEGRA



ISSN AÑO 1 VOLUMEN 1

CONCLUSIONES

Para lograr la cuadratura del círculo, la trisección del ángulo y la duplicación del cubo es imposible realizarlos con las herramientas de la regla y el compás. Para darle solución a estos tres grandes problemas se requieren de otros mecanismos, y una de estas herramientas nos la brinda GEOGEBRA.

REFERENTES BIBLIOGRAFÍCOS.

Baldor, A. Geometría plana y del espacio, con una introducción a la trigonometría. Publicaciones Cultural. México, 2004.

Fuentes, Fabio. Geometría plana, ¡de Euclides al Cabri! Editorial Nueva Oportunidad. Bogotá. 2010.

Landaverde, Felipe de Jesús. Curso de Geometría. Segunda Edición. Editorial Progreso, S. A. México. 1962.

Pérez, Antonio. ¡Malditos sean la regla y el compás!, Conferencia. Madrid. 2007

Rey Pastor, J. y Puig Adam. Elementos de Geometría Racional. Tomo I. Editorial Nuevas Graficas. Madrid. 1960.

Rodríguez, G. Metodología de la investigación cualitativa. Ediciones Aljibe. 1996.